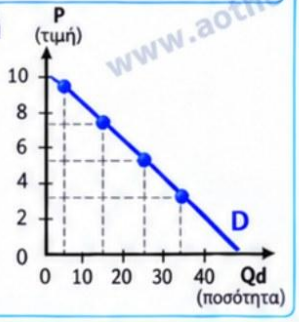
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΖΗΤΗΣΗΣ

Γραμμική συνάρτηση & Ισοσκελής υπερβολή – τι προσέχω, πώς ξεχωρίζω και πώς αποδεικνύω το είδος της συνάρτησης

Α. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΖΗΤΗΣΗΣ

Μορφή: $Q_d = \alpha - \beta P$ ή $P = \alpha - \beta Q_d$

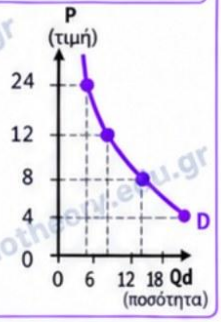
- **Γραφική παράσταση:** ευθεία γραμμή με αρνητική κλίση.
- Για ίσες μεταβολές της τιμής, έχουμε ίσες απόλυτες μεταβολές της ζητούμενης ποσότητας.
- Η κλίση είναι σταθερή.
- Η ελαστικότητα **ΔΕΝ** είναι ίδια σε όλα τα σημεία της καμπύλης.



Β. ΙΣΟΣΚΕΛΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Μορφή: $Q_d = \frac{A}{P}$ ή $P \cdot Q_d = \text{σταθερό}$

- **Γραφική παράσταση:** καμπύλη ισοσκελούς υπερβολής.
- Το γινόμενο P × Qd παραμένει σταθερό.
- Η συνολική δαπάνη ($\Sigma\Delta = P \cdot Q_d$) είναι σταθερή σε όλα τα σημεία.
- Η ελαστικότητα ζήτησης είναι μοναδιαία ($|E_d| = 1$) σε όλα τα σημεία.
- Δεν έχουμε σταθερή κλίση.



ΠΩΣ ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΩ ΤΟ ΕΙΔΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ;

Για να δείξω ότι είναι ΓΡΑΜΜΙΚΗ

1. Ελέγχω αν για ίσες μεταβολές της τιμής προκύπτουν **ίσες** μεταβολές στη Qd.
2. Υπολογίζω τις πρώτες διαφορές: $\frac{\Delta Q_d}{\Delta P}$ σταθερό ως προς την απόλυτη μεταβολή.
3. Αν τα σημεία ανήκουν σε ευθεία, η συνάρτηση είναι γραμμική.
4. Μπορώ να βρω τύπο της μορφής $Q_d = \alpha - \beta P$.

Για να δείξω ότι είναι ΙΣΟΣΚΕΛΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗ

1. Ελέγχω αν το γινόμενο P × Qd είναι σταθερό σε όλα τα σημεία.
2. Αν η συνολική δαπάνη παραμένει ίδια, τότε πρόκειται για ισοσκελή υπερβολή.
3. Μπορώ να γράψω τον τύπο $Q_d = \frac{A}{P}$.
4. Η ελαστικότητα είναι μοναδιαία σε όλη την καμπύλη.

ΟΤΑΝ ΔΕΝ ΜΟΥ ΛΕΕΙ ΤΙ ΕΙΔΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΙΝΑΙ

1. Κοιτάζω τον πίνακα ή τα δεδομένα.
2. Ελέγχω πρώτα αν οι απόλυτες μεταβολές της Qd είναι ίσες για ίσες μεταβολές της P. → **Γραμμική**
3. Αν όχι, ελέγχω αν το P × Qd είναι σταθερό. → **Ισοσκελής υπερβολή**
4. Αν χρειάζεται, γράφω τον τύπο και κάνω επαλήθευση σε όλα τα σημεία.

ΠΟΤΕ δεν υποθέτω βιαστικά το είδος της συνάρτησης χωρίς έλεγχο.

ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ ΜΑΘΗΤΩΝ

- Μπερδεύουν τη σταθερή κλίση με τη σταθερή ελαστικότητα.
- Θεωρούν ότι κάθε φθίνουσα καμπύλη είναι γραμμική.
- Ξεχνούν να ελέγξουν το γινόμενο P · Qd.
- Στην ισοσκελή υπερβολή εξετάζουν διαφορές αντί για γινόμενο.
- Γράφουν γραμμικό τύπο ενώ τα δεδομένα δείχνουν υπερβολή.
- Όταν δεν δίνεται είδος συνάρτησης, απαντούν χωρίς απόδειξη.

CHECKLIST ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- ☑ Ελέγξα μεταβολές ή γινόμενο;
- ☑ Απέδειξα και δεν υπέθεσα το είδος της συνάρτησης;
- ☑ Ξεχώρισα σωστά γραμμική / ισοσκελή υπερβολή;
- ☑ Αιτιολόγησα με σωστό οικονομικό κριτήριο;
- ☑ Έγραψα σωστά τον τύπο;

ΜΙΚΡΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1 Γραμμική

P (ευρώ)	2	4	6
Qd (τεμάχια)	18	14	10

Ίση μεταβολή: κάθε αύξηση της P κατά 2 μειώνει τη Qd κατά 4.

2 Ισοσκελής υπερβολή

P (ευρώ)	2	4	8
Qd (τεμάχια)	24	12	6

$P \cdot Q_d = 48$ σε όλα τα σημεία.

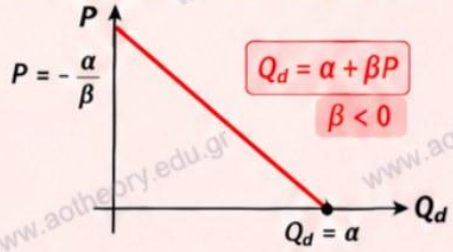
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΖΗΤΗΣΗΣ

www.aotheory.edu.gr
Πάκος Δημήτριος
Οικονομολόγος – Εκπαιδευτικός

1. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΖΗΤΗΣΗΣ

$$Q_d = \alpha + \beta P \quad (\beta < 0)$$

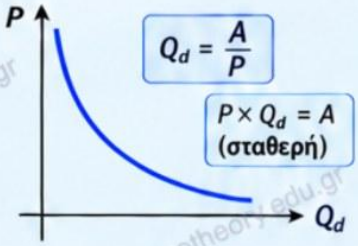
- Ευθεία γραμμή με αρνητική κλίση.
- Όταν η τιμή αυξάνεται, η ζητούμενη ποσότητα μειώνεται.
- Το β είναι αρνητικό (β < 0).
- Το α είναι πάντα θετικό (α > 0).
- Τέμνει τον άξονα Q_d στον α.
- Οι τιμές της Q_d δεν μπορεί να είναι αρνητικές (στην οικονομική ερμηνεία).



2. ΙΣΟΣΚΕΛΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗ ΖΗΤΗΣΗΣ

$$Q_d = \frac{A}{P} \quad (A > 0)$$

- Καμπύλη υπερβολή.
- Όταν η τιμή αυξάνεται, η ζητούμενη ποσότητα μειώνεται.
- Το Α είναι θετικό (Α > 0).
- Δεν τέμνει τους άξονες (ούτε αρνητικές ποσότητες).
- Η δαπάνη ($P \times Q_d$) παραμένει σταθερή και ίση με Α.



3. ΠΩΣ ΞΕΧΩΡΙΖΩ ΤΟ ΕΙΔΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ;

1 Εξετάζω το γινόμενο $P \times Q_d$

- Αν είναι σταθερό στις παρατηρήσεις → Ισοσκελής υπερβολή.
- Αν δεν είναι σταθερό → Γραμμική.

2 Εξετάζω τις μεταβολές (ΔP, ΔQ_d)

- Αν ο λόγος $\Delta Q_d / \Delta P$ είναι σταθερός → Γραμμική (ίδια κλίση).
- Αν το γινόμενο $P \times Q_d$ είναι σταθερό → Ισοσκελής υπερβολή.

3 Λύνω και ελέγχω

- Βρίσκω τη συνάρτηση.
- Ελέγχω αν ικανοποιεί όλες τις παρατηρήσεις.
- Απόρριψη αν προκύπτει $A \leq 0$ (δεν έχει οικονομικό νόημα).

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΑ

Στοιχείο	Γραμμική $Q_d = \alpha + \beta P$	Ισοσκελής υπερβολή $Q_d = \frac{A}{P}$
Μορφή	Ευθεία	Υπερβολή
Κλίση	Σταθερή (β < 0)	Μη σταθερή
Τομή με άξονες	Τέμνει και τους δύο	Δεν τέμνει
Τιμές Q_d	Δεν παίρνει αρνητικές τιμές ($Q_d \geq 0$)	Πάντα θετικές (A > 0)
Δαπάνη ($P \times Q_d$)	Δεν είναι σταθερή	Σταθερή ($P \times Q_d = A$)

ΤΙ ΝΑ ΠΡΟΣΕΞΕΙ Ο ΜΑΘΗΤΗΣ

1. Η συνάρτηση ζήτησης έχει αρνητική σχέση με την τιμή.
2. Ελέγχουμε πάντα τις μονάδες μέτρησης.
3. Στη γραμμική, το β είναι αρνητικό.
4. Στην υπερβολή, το A είναι θετικό.
5. Αν δεν μας λέει τι είδους συνάρτηση είναι, χρησιμοποιούμε τα κριτήρια ($P \times Q_d$ και $\Delta Q_d / \Delta P$).
6. Αφού βρούμε τη συνάρτηση, ελέγχουμε ότι ικανοποιεί όλες τις παρατηρήσεις.
7. Απορρίπτουμε λύσεις που δίνουν αρνητικές ποσότητες ή $A \leq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: ΕΥΡΕΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΖΗΤΗΣΗΣ

Για ένα αγαθό δίνονται οι παρακάτω παρατηρήσεις:

Συνδυασμός	Τιμή (P)	Ζητούμενη ποσότητα (Q_d)
1	2	18
2	4	14
3	6	10

Να βρεθεί η συνάρτηση ζήτησης.

Βήματα:

1. Βρίσκω το β (με αφαίρεση κατά μέλη).
2. Βρίσκω το α (με αντικατάσταση).
3. Ελέγχω με τον 3ο συνδυασμό.

1. Βρίσκω το β με αφαίρεση κατά μέλη

Για τη γραμμική συνάρτηση: $Q_d = \alpha + \beta P$

Παίρνω τους συνδυασμούς 1 και 2:

$$\begin{cases} Q_{d1} = \alpha + \beta P_1 \rightarrow 18 = \alpha + 2\beta & (1) \\ Q_{d2} = \alpha + \beta P_2 \rightarrow 14 = \alpha + 4\beta & (2) \end{cases}$$

Αφαιρώ (1) – (2) κατά μέλη:

$$(18 - 14) = (\alpha + 2\beta) - (\alpha + 4\beta)$$
$$4 = -2\beta$$
$$\boxed{\beta = -2}$$

2. Βρίσκω το α με αντικατάσταση

Αντικαθιστώ το $\beta = -2$ στον συνδυασμό 1:

$$18 = \alpha + 2(-2)$$
$$18 = \alpha - 4$$
$$\alpha = 22$$
$$\boxed{\alpha = 22}$$

3. Ελέγχω με τον 3ο συνδυασμό

Η συνάρτηση που βρήκαμε είναι:

$$Q_d = 22 - 2P$$

Για P = 6:

$$Q_d = 22 - 2 \cdot 6$$
$$Q_d = 22 - 12$$
$$\boxed{Q_d = 10}$$ ✓

- Ικανοποιεί τον 3ο συνδυασμό.

Από τους συνδυάσμους 1, 2 και 3 η συνάρτηση ζήτησης είναι:

$$\boxed{Q_d = 22 - 2P}$$

Έλεγχος οικονομικής λογικής:

- ✓ $\beta = -2 < 0$ (αρνητική σχέση)
- ✓ για $P = 0 \rightarrow Q_d = 22$ (> 0)

Συμπέρασμα:

Από τους συνδυασμούς 1, 2 και 3 η συνάρτηση ζήτησης είναι γραμμική και δίνεται από:

$$\boxed{Q_d = 22 - 2P}$$

ΙΣΟΣΚΕΛΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗ ΖΗΤΗΣΗΣ

Άσκηση – Μεθοδολογία

www.aotheory.edu.gr
Πάκος Δημήτριος
Οικονομολόγος – Εκπαιδευτικός

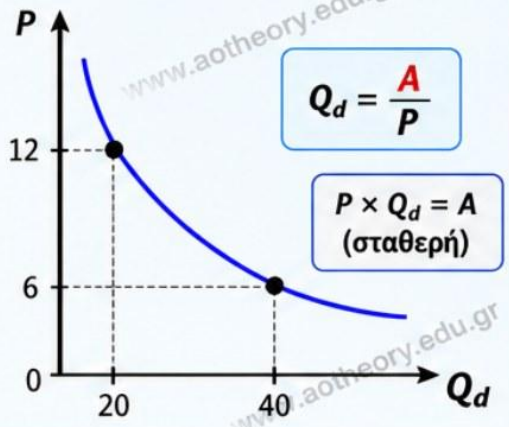
1. ΜΟΡΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ισοσκελής υπερβολή ζήτησης:

$$Q_d = \frac{A}{P} \quad (A > 0)$$

- Η καμπύλη είναι υπερβολή.
- Όταν η τιμή αυξάνεται, η ζητούμενη ποσότητα μειώνεται.
- Το **A** είναι θετικός αριθμός ($A > 0$).
- Δεν τέμνει τους άξονες (ούτε $P = 0$, ούτε $Q_d = 0$).
- Η δαπάνη ($P \times Q_d$) παραμένει σταθερή και ίση με A.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ



2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – ΕΚΦΩΝΗΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

Για ένα αγαθό δίνονται οι παρακάτω συνδυασμοί τιμής (P) και ζητούμενης ποσότητας (Q_d):

Συνδυασμός	Τιμή (P)	Ζητούμενη ποσότητα (Q_d)
1	2	60
2	4	30
3	6	20

α) Να βρεθεί η συνάρτηση ζήτησης.

β) Να βρεθεί η ζητούμενη ποσότητα όταν η τιμή είναι $P = 10$.

3. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΗ

1. Όταν η τιμή διπλασιάζεται (2→4), η ποσότητα υποδιπλασιάζεται (60→30).
2. Όταν η τιμή τριπλασιάζεται (2→6), η ποσότητα γίνεται το ⅓ (60→20).
3. Ο λόγος $P \times Q_d$ είναι σταθερός:

$$2 \times 60 = 120$$
$$4 \times 30 = 120$$
$$6 \times 20 = 120$$

Άρα η συνάρτηση είναι ισοσκελής υπερβολή και το $A = 120$.

4. ΠΩΣ ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΩ ΟΤΙ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΣΚΕΛΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗ;

1. Υπολογίζω το γινόμενο $P \times Q_d$ για όλους τους συνδυασμούς.
2. Αν το γινόμενο είναι σταθερό (ίσο με ίδιο θετικό αριθμό),
3. Αν το γινόμενο είναι σταθερό (ίσο με ίδιο θετικό αριθμό), τότε η συνάρτηση είναι ισοσκελής υπερβολή.
3. Ο σταθερός αυτός αριθμός είναι το A.

5. ΛΥΣΗ – ΒΗΜΑ ΒΗΜΑ

1 Έλεγχος τύπου συνάρτησης

Συνδυασμός	P	Q_d	$P \times Q_d$
1	2	60	120
2	4	30	120
3	6	20	120

Το $P \times Q_d$ είναι σταθερό (120).
Άρα η συνάρτηση είναι ισοσκελής υπερβολή και $A = 120$.

2 Βρίσκω τη συνάρτηση

Η μορφή της συνάρτησης είναι $Q_d = \frac{A}{P}$ και βρήκαμε $A = 120$.

$$Q_d = \frac{120}{P}$$

3 Υπολογίζω το ζητούμενο

Για $P = 10$:

$$Q_d = \frac{120}{10} = 12 \text{ τεμάχια}$$

6. ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- ✓ Στην ισοσκελή υπερβολή το $A > 0$ (πάντα θετικό).
- ✓ Οι τιμές P και οι ποσότητες Q_d είναι πάντα θετικές.
- ✓ Η συνάρτηση δεν τέμνει τους άξονες ($P = 0$ ή $Q_d = 0$ δεν ορίζεται).
- ✓ Η ολική δαπάνη $P \times Q_d$ είναι σταθερή και ίση με A.
- ✓ Όταν η τιμή αυξάνεται, η ποσότητα μειώνεται και αντίστροφα.

Έτσι, κάθε φορά που το γινόμενο $P \times Q_d$ είναι το ίδιο για όλους τους συνδυασμούς, η συνάρτηση είναι ισοσκελής υπερβολή.

www.aotheory.edu.gr

ΑΣΚΗΣΗ – ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΖΗΤΗΣΗΣ

Λύση με μεθοδολογία βήμα-βήμα

Πάκος Δημήτριος – Οικονομολόγος Εκπαιδευτικός | www.aotheory.edu.gr

1. ΕΚΦΩΝΗΣΗ / ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας ζήτησης ενός κανονικού αγαθού:

Σημεία	Τιμή (P)	Ζητούμενη ποσότητα (Qd)
Α	500	300
Β	400	600
Γ	300	900
Δ	200	1200

Ζητούνται:

α. Να προσδιοριστεί ο τύπος της συνάρτησης ζήτησης.
β. Για P = 350, ποια θα είναι η ζητούμενη ποσότητα;
γ. Για Qd = 450, ποια θα είναι η τιμή;
δ. Να υπολογιστεί η μεταβολή της ζητούμενης ποσότητας καθώς η τιμή αυξάνεται από 250 σε 450 χρηματικές μονάδες.
ε. Να υπολογιστεί η ποσοστιαία μεταβολή της ζητούμενης ποσότητας καθώς η τιμή αυξάνεται από 200 σε 400 χρηματικές μονάδες.

2. α. ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΖΗΤΗΣΗΣ

Εξετάζω αν η συνάρτηση είναι γραμμική.

Βήμα 1 – Υπολογίζω τις μεταβολές.

Μεταβολή από ... σε ...	ΔP	ΔQd	ΔQd / ΔP
Α → Β	ΔP = 400 − 500 = −100	ΔQd = 600 − 300 = +300	300 / (−100) = −3
Β → Γ	ΔP = 300 − 400 = −100	ΔQd = 900 − 600 = +300	300 / (−100) = −3
Γ → Δ	ΔP = 200 − 300 = −100	ΔQd = 1200 − 900 = +300	300 / (−100) = −3

Άρα η συνάρτηση είναι **ΓΡΑΜΜΙΚΗ.**

Βήμα 2 – Γράφω τη μορφή της γραμμικής συνάρτησης.

$$Qd = \alpha + \beta P \qquad \beta < 0$$

Εφόσον $\beta = -3$, τότε:

$$Qd = \alpha - 3P$$

Βήμα 3 – Βρίσκω το α με αντικατάσταση.

Χρησιμοποιώ το σημείο Β (P = 400, Qd = 600):

$$600 = \alpha - 3 \cdot 400$$
$$600 = \alpha - 1.200$$
$$\alpha = 1.800$$

Από τους συνδυασμούς προκύπτει:

$$Qd = 1.800 - 3P$$

Έλεγχος με το σημείο Δ:
Για P = 200: $Qd = 1.800 - 3 \cdot 200 = 1.200$ ✓

3. β. Εύρεση ζητούμενης ποσότητας (P = 350)

1. Γράφω τη συνάρτηση: $Qd = 1.800 - 3P$.
2. Αντικαθιστώ $P = 350$.
3. $Qd = 1.800 - 3 \cdot 350 = 1.800 - 1.050 = 750$

Άρα για P = 350, η ζητούμενη ποσότητα είναι Qd = 750 τεμάχια.

4. γ. Εύρεση τιμής (Qd = 450)

1. Θέτω $Qd = 450$ στη συνάρτηση.
2. $450 = 1.800 - 3P$
3. $3P = 1.800 - 450 = 1.350$
4. $P = \frac{1.350}{3} = 450$

Άρα όταν $Qd = 450$, η τιμή είναι $P = 450$ χρηματικές μονάδες.

5. δ. Μεταβολή της Qd όταν η τιμή αυξάνεται από 250 σε 450

Βήμα 1 – Για P = 250:
$Qd_1 = 1.800 - 3 \cdot 250 = 1.800 - 750 = 1.050$

Βήμα 2 – Για P = 450:
$Qd_2 = 1.800 - 3 \cdot 450 = 1.800 - 1.350 = 450$

Βήμα 3 – Μεταβολή:
$\Delta Qd = Qd_2 - Qd_1 = 450 - 1.050 = -600$

Η ζητούμενη ποσότητα μειώνεται κατά 600 μονάδες.

6. ε. Ποσοστιαία μεταβολή της Qd από 200 σε 400

Βήμα 1 – Για P = 200:
$Qd_1 = 1.800 - 3 \cdot 200 = 1.200$

Βήμα 2 – Για P = 400:
$Qd_2 = 1.800 - 3 \cdot 400 = 600$

Βήμα 3 – Μεταβολή:
$\Delta Qd = 600 - 1.200 = -600$

Βήμα 4 – Ποσοστιαία μεταβολή:

$$\%\Delta Qd = \frac{\Delta Qd}{\text{αρχική } Qd} \times 100 = \frac{-600}{1.200} \times 100 = -50\%$$

Η ζητούμενη ποσότητα παρουσιάζει ποσοστιαία μείωση 50%.

7. ΤΕΛΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

- Η συνάρτηση ζήτησης είναι: $Qd = 1.800 - 3P$.
- Για $P = 350 \rightarrow Qd = 750$.
- Για $Qd = 450 \rightarrow P = 450$.
- Από $P = 250$ σε $P = 450 \rightarrow \Delta Qd = -600$.
- Από $P = 200$ σε $P = 400 \rightarrow \%\Delta Qd = -50\%$.

CHECKLIST

- ☑ Βρήκα τον τύπο;
- ☑ Έκανα αντικατάσταση;
- ☑ Υπολόγισα σωστά τη μεταβολή;
- ☑ Έβγαλα σωστά την ποσοστιαία μεταβολή;